数理解析研究所講究録
376巻 1980年 1-21

二階常微分方程式の比較定理と応用

京大 理　宮武貞夫

§1. 序　$u''=g(x,u,u')$ の形の常微分方程式を $(0,\infty)$ で考える。特にその正値有界な解についての比較による取扱いについて論じたい。始めに例として指数函数をとりあげてみよう。e^{-ax} は $x=0$ で値 1 で $(0,\infty)$ で正値有界なものであるが，これを $u''=a^2u$ の解として考えたい。他に $v''=b^2v$ の解 e^{-bx} をとりあげて次の様な比較をする。もし $0<b<a$ ならば $(0,\infty)$ で

$$0<e^{-ax}<e^{-bx}$$

がなりたつ。この不等式を'あえて'二つの方程式 $u''=a^2u$ と $v''=b^2v$ の係数の間の大小関係 $b^2<a^2$ と関連させて考えてみることができる。ここで注意すべきことは，e^{-ax} は $x=0$ で値 1 をとる $u''=a^2u$ の解の中で $0<u<e^{-bx}$ を $(0,\infty)$ でみたす唯一つの解であることである。一般に無限集合の中から唯一つのものを選び出すことはあまり容易な事ではないはずであるけれども，たまたま指数函数の場

合には 高等学校以来 親しんで良く知っているため，上の不等式は当然のこととみなされてしまう。しかしながら この自明なことを 我々に与えられている大切な情報とみなすこともできる。より広い事柄を知り，更にそれらを共通な仕方で取り扱うための逆により単純なより基本的な考え方に行き着くための情報である。 例えばまず問題を次の様に考えてみよう。「二つの方程式 $u'' = g(x)u$ と $v'' = g_1(x)v$ を考え $(0, \infty)$ で $g(x) > g_1(x)$ を仮定する。今 $v'' = g_1(x)v$ の解 $v(x)$ があって $(0, \infty)$ で正値，$v(0) = 1$ とする。その時 $u'' = g(x)u$ の解 $u(x)$ で $(0, \infty)$ で $0 < u(x) < v(x)$ をみたし，$u(0) = 1$ なるものが唯一つ存在するであろうか？」 前と少しは趣きが変わるが それでも ちょっと見た所では簡単そうである。けれども これを肯定的に解くためには，凸性についての非局所的な考察と 実数の完備性の一特性に関わる基本的な考え方が必要である。このことから，より広い一般的な一群の問題があることが推測される。その様な拡張の動機を与える例として，Thomas－Fermi の問題をあげよう：「 $u'' = x^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{2}}$ を $(0, \infty)$ でみたし，$u(0) = 1$，$(0, \infty)$ で正値有界な解を捜す。」この問題は量子力学の多くの教科書に出ているもので，(例えば ランダウ リフシッツ，パウリ，シッフ その他の本)，電子のふるまいについての近似方程式とされている。この Thomas－

Fermi の方程式の解を先の線型方程式の解と比べてみると，$u(0)=1$ ，$(0,\infty)$ で正値有界である点が共通であることにはすぐ気が付く。それゆえ そのもとである方程式の間の共通性について考えてみる必要がある。その際 我々の比較の立場からすれば，Thomas-Fermi の方程式を既知の解を持つどの様な方程式と比較するのかという事が問題となる。又この点は一般的に定理をまとめようとする時に参考として大事な点である。比較の対象としてどの様なものをとるかは，あくまで一つの選択にすぎないといえるだろうし，いいかえると表面的には一般的な立場の放棄といえだろうが，しかしながら何か一つの道をとらなければ，ふつうは考えも進まないし，又その意欲も出てこない様である。ここでも一つの素朴な方法をとり，その考察を経て，一般的比較定理にせまりうる可能性がある事を希っている。 さて $u''=x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}$ の場合には特殊解 12^2x^{-3} が良く知られている事が役に立つ。その平行移動した函数 $v=12^2(x+12^{\frac{2}{3}})^{-3}$ は $v(0)=1$ であり，方程式 $v''=(x+12^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}}$ の解であるが，この方程式をもとの $u''=x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}$ と比較して論じることが出来て，次の事が言える。「$u''=x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}$ は $u(0)=1$ であり，$(0,\infty)$ で $0<u(x)<12^2(x+12^{\frac{2}{3}})^{-3}$ が存在し，それは正値有界な範囲で一意的である。」（注，Thomas-Fermi の問題

の解は 1929年 A. Mambriani [1] により報告されて以来，その解の漸近的な性質や局所的な性質については，主として級数展開の方法等により研究されてきたが，その大域的な評価は筆者の知る限りではない様である。[2], [3] 等参照）更により広い Emden－Fowler の方程式：$u'' = x^{-\frac{2}{k}} u^{\frac{k+2}{k}}$ についても $k>2$ の時は トーマス・フェルミ の場合（$k=4$）と全く同様に取扱いが出来る。これらの実際現象の方程式とされているものは 当然尊重されねばならないが，それらはあくまで近似の方程式とみなせるし，又それ故修正される可能性もある。起りうる修正に耐え，又より積極的には修正の許される範囲についての参考になりうるためには，扱う方程式のクラスを純粋に数学的見方から広げて，問題の扱い方の基本的原理がはっきりする様に一般化しておかなければならない。その様な範囲として扱う方程式のクラスを「その解が有限値の時には導函数も有限にとどまる。」というもの を考えた。そのクラスは簡単で具体的な特徴付けを与えることが出来て，それに依り定理をまとめた。これは 証明の方法についての吟味を行うことにより，たまたま設けられた範囲ではあるが，そこに常微分方程式の大域的考察の許される自然な限界がある様な気がする。

§2、定理の記述　　二つの方程式

(1)　$u'' = g(x, u, u')$

(2)　$v'' = g_1(x, v, v')$

を $(0, \infty)$ で考える。g と g_1 の間で

(※)　$g(x,y,z) > g_1(x,y,z)$　,　$(x,y,z) \in R_+ \times R_+ \times R$

$(R_+ = (0, \infty))$

を仮定する。次の定理を得る

定理1。(2)の解 $v(x)$ があって $(0, \infty)$ で正値，$v(0) = p > 0$，(有限) とする。$g(x,y,z)$ が (※) と後に述べる条件 (A) (i)～(iv) をみたすならば，(1)の解で $(0, \infty)$ に於て

$0 < u(x) < v(x)$ ，$u(0) = v(0) = p$ をみたす $u(x)$ が存在する。

(A) (i)　$g(x,y,z)$ は $D = R_+ \times R \times R$ で連続で (y,z) について リプシッツ連続とする。

(ii)　R に含まれる任意のコンパクト集合 K に対して $g_K(x) \in L^1_{loc.}$ が存在して

$$\sup_{y \in K} |g(x,y,z)| \leq g_K(x) \{ |z|^2 + 1 \}$$

即ち x に関して可積分，z に関して高々2次のオーダとする。

(iii)　$g(x, 0, 0) \leq 0$　in　$(0, \infty)$

(iv) $u(x,p,t)$ を初期値 $u(0)=p$, $u'(0)=t$ をみたす (1) の解とする。その時 $t_0\ (>0)$ と $x_0\ (>0)$ が存在して $t<-t_0$ なるすべての t に対して $u(x,p,t)$ は $(0,x_0)$ に於て零点を持つ。

次に一意性に関する定理を比較の形で述べよう。その場合 (2) の代りに線型の方程式

(3) $\quad v'' = g_2(x,v,v') = \alpha_0(x)v + \alpha_1(x)v'$

を使い, (※) の代りに

(※※) $\quad g(x,y,z) - g(x,y_1,z_1) \geq g_2(x, y-y_1, z-z_1)$

ここで, (x,y,z), $(x,y_1,z_1) \in R_+\times R\times R$, $y>y_1$

を仮定する。

定理2 方程式 (3) が $(0,\infty)$ に於て正値有界かつ $v(0)=1$ なる解をただ一つ持つと仮定する。(A) と (※※) を仮定すると (1) の解 $u(x)$ で $u(0)=p>0$ をみたし正値有界な解が一意的に存在する。

注意 定理2の仮定及び定理1より $0<u(x)\leq p\,v(x)$ が $(0,\infty)$ で成立する。一般に評価としては定理1の様に非線型同志の比較の方がより良いものが得られる。

次に§1で述べた事に相当する応用のための定理として，定理1からただちに従うものをまとめておこう。すなわち(1)の一つの特殊解が知られている時，それを平行移動させた形の函数により，$u(0)=p$ なる(1)の解を評価する事を考えよう。

定理3. (1)の一つの解 $w(x)$ (>0) が $(0,\infty)$ で存在すると仮定する．更に与えられた正の数 p に対て $w(\beta)=p$ なる $\beta>0$ が存在するものとする。もし(A)をみたし，かつ

$$(*)' \qquad g(x,y,z) > g(x+\beta,y,z), \qquad (x,y,z)\in R_+\times R_+\times R$$

がなりたつならば(1)の解で

$$0<u(x)<w(x+\beta)$$

をみたすものが存在する。

証明　$v(x)=w(x+\beta)$ とおくと $v''=g(x+\beta,v,v')$ をみたすから定理1に帰着する。

例として Emden-Fowler の方程式に定理3を適用してみよう。$u''=x^{-2/k}u^{(k+2)/k}$ の $(0,\infty)$ における解として $w(x)=(k(k-1))^{k/2}x^{1-k}$ ととる。$\beta=\{p^{-1}(k(k-1))^{k/2}\}^{1/k-1}$ ととるならば，$w(\beta)=p$ であり，次の評価を得る解 $u(x)$ が存在する。$u(0)=p$ で $(0,\infty)$ に於て

$$0<u(x)<(k(k-1))^{k/2}(x+\beta)^{1-k}.$$

最後に定理1に対する系と注意を述べておこう．

<u>定理1の系</u>　定理1に於て条件(*)を

$$\overline{(*)} \quad g(x,y,z) \ge g_1(x,y,z) \quad , \quad (x,y,z)\in R_+\times R_+\times R$$

でおきかえと，結論は $0<u(x)<v(x)$ を

$$0< u(x) \le v(x)$$

でおきかえたものが他はそのままの形でなりたつ。

（証明は我々の定理1の証明法に少し工夫を加えるだけで良い。問題によれば定理1の表現の方が有用であるので，そちらを採用した。）

<u>注意</u>　ここで補足として我々の条件$\overline{(*)}$と(A)(ii)を南雲[4]の二点境界値問題に表われる条件と関連させて論じておこう。そのために南雲の定理を岡村著，微分方程式序説により紹介しておこう。

<u>南雲の定理</u>　$u''=g(x,u,u')$ を有限区間 (a,b) で考え

(N_1) $g(x,y,z)$ は $[a,b]\times[\underline{\omega}(x)\ \overline{\omega}(x)]\times R$ で連続かつ有界とする。但し，$\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$ は区間 $[a,b]$ で2回微分可能で，かつ

$$(N_2) \qquad \overline{\omega}'' \le g(x,\overline{\omega}(x),\overline{\omega}'(x))$$
$$\underline{\omega}'' \ge g(x,\underline{\omega}(x),\underline{\omega}'(x)), \quad \underline{\omega}(x)\le\overline{\omega}(x), \quad (a\le\ \le b)$$

を仮定する。そのとき α, β を

$$\underline{\omega}(a)\le\alpha\le\overline{\omega}(a) \quad , \quad \underline{\omega}(b)\le\beta\le\overline{\omega}(b)$$

となるようにとれば $u(a)=\alpha$, $u(b)=\beta$ をみたし $\underline{\omega}(x)\le u(x)\le\overline{\omega}(x)$ を (a,b) でみたす $u''=g(x,u,u')$ の解が (a,b) に存在する。

上記の　微分方程式序説は基本から説きおこすという姿勢で書かれた本であるが，南雲の定理についてだけは，他の所と異なり「巧妙な定理」という表現をしている。それだけにこの言葉は他におきかえられぬものあり，一人の数学者の生きた言葉であるから，ひとりだち１て読者に働きかけ考えこませる力がある。「妙」を文字通りにとるならば，「はっきりとはわかるすべもないが，何か背後に調和のあるものの存在を感じさせる」という様な意味であろう。それゆえ我々の見方からも南雲の定理について考えてみることが求められている。その結果として次の(I)(II)がいえる。

(I)．(N_2)の条件に於て　例えば　$\overline{\omega}'' \leq g(x, \overline{\omega}, \overline{\omega}')$　は

$$g_1(x, y, z) = g(x, y, z) + \overline{\omega}'' - g(x, \overline{\omega}, \overline{\omega}'),$$

とおくことにより　条件$(\overline{\ast})$と同等であり，$\overline{\omega} = v$　は方程式(2)の特解である．すなわち(N_2)は方程式の比較の条件とみなすことが出来，その時 $\underline{\omega}$　$\overline{\omega}$ は比較される解である．

(II)．南雲の証明法は$(\underline{\omega}, \overline{\omega})$の外へ出た解も考慮しながら，解の集合についてのクネーサーの連結定理を使うのであるが，次の§2でとる証明法は$(\underline{\omega}, \overline{\omega})$の外は一切考えない方法であり，応用としてただちに次の定理をうる

<u>定理A</u>．$g(x, y, z)$を$(a, b) \times R \times R$で連続でかつ(y, z)についてリプシッツ連続とする．$g(x, y, z)$のzについての有

界性の条件を次の様にゆるめて仮定する。(N_2)をみたすとする。

$$(H_1) \qquad \sup_{\substack{x\in(a,b)\\ y\in(\underline{\omega},\overline{\omega})}} |g(x,y,z)| \leq \text{Const.}\{|z|^2+1\}$$

その時 南雲の定理の結論が成りたつ。

<u>注意A.</u> 上の定理Aにおいて(y,z)に関するリプシッツ連続性をとりのぞくことが出来る。この証明はここで考える方法に，解の集合の連結性に関する考察を付け加えて得られる。それは $x=\text{constant}$ という面のみならず $y=\underline{\omega}$ と $y=\overline{\omega}$ なる面の上でも連結性を考える方法である。別の機会に論じる。

<u>注意B</u> 条件(H_1)を

$$(H_1)' \qquad \sup_{\substack{x\in(a,b)\\ y\in(\underline{\omega},\overline{\omega})}} |g(x,y,z)| \leq g(x)\{|z|^2+1\}$$

でおきかえることが出来る。ここで$g(x)$は(a,b)で連続で$L^1(a,b)$に属する函数である。但し端点$x=a$，$x=b$に於て定理1の条件(A)(iV)に相当する条件を設ける必要がある。

§3 定理の証明. はじめにくり返し使う Lemma を述べよう。

Lemma 1. $u(x)$ と $v(x)$ をそれぞれ (1), (2) の解とする。
$(x, y, z) \in R_+ \times R \times R$ に対して $g(x, y, z) > g_1(x, y, z)$ を仮定する。
今 $u(x) \leq v(x)$ が開区間 (a, b) で成立するならば, 実は (a, b) に於て, $u(x) < v(x)$ である。

証明. $x_0 \in (a, b)$ に於て $u(x_0) = v(x_0)$ を仮定するならば, x_0 の近傍で $u(x) \leq v(x)$ となるためには $u'(x_0) = v'(x_0)$ かつ $u''(x_0) \leq v''(x_0)$ でなければならない。他方 Lemma 1 の仮定と $u(x), v(x)$ が方程式 (1), (2) の解であることから $u''(x_0) > v''(x_0)$ であり矛盾である。

注意 スツルムの比較定理が上の Lemma 1 よりただちに従う。

定理 1 の証明, 二段階に分けて考えよう。

第一段. 有限区間 $(0, n)$ に於て $0 < u(x) < v(x)$ をみたし $u(0) = v(0) = p > 0$ なる (1) の解の存在を示そう。初期値が $u(0) = p$, $u'(0) = s$ なる解 $u_s(x)$ の集合を考えよう。パラメーター s は $-s_0 \leq s \leq v'(0)$ の範囲とする. (A)(i) 及び (A)(ii) より解 $u_s(x)$ は $x = 0$ の近傍で存在する。パラメータ s を次の三クラスに分類する。

$$U = \{ s ;\ {}^{\exists}x_0 < n,\ v(x_0) = u_s(x_0),\ 0 < u_s(x) \text{ in } (0, x_0) \}$$

$$D = \{ s ;\ {}^{\exists}x_0 < n,\ u_s(x_0) = 0,\ u_s(x) < v(x) \text{ in } (0, x_0) \}$$

$M = \{ s \; ; \; s \notin U \cup D \}$

次に函数 $f(s)$ を次の様に定義しよう。まず $s \in U \cup D$ に対し

$$f(s) = v(n) \quad , \quad s \in U$$

$$f(s) = 0 \quad , \quad s \in D$$

とする。 $s \in M$ に対して

$$f(s) = u_s(n)$$

と定義したい。この様に定義できること，即ち $s \in M$ に対して解 $u_s(x)$ が $x=n$ まで延長できることを後に述べる Lemma 2 としてまとめるが，ひとまずここではそれを認めよう。上の様に $f(s)$ を定義すると $f(s)$ は $(-s_0, v'(0))$ で連続函数であることが以下の様にしてわかる。$s=s_0 \in M$ なる点では初期値に対する解の連続性より $f(s)$ は連続である。$s=s_0 \in U$ の点では Lemma 1 より $f(s)$ は連続である事がわかる。なぜならば不連続であるとするならば $(0, n)$ のある点で ~~ff~~ $u_{s_0}(x)$ と $v(x)$ が接し $u_{s_0}(x) \leq v(x)$ となるはずであるがこれは Lemma 1 に反するからである。同様にして $s_0 \in D$ の点でも $f(s)$ は連続である。もし不連続ならば $(0, n)$ のある点で $u_{s_0}(x)$ と $y=0$ が接し $0 \leq u_{s_0}(x)$ が $(0, n)$ でなりたつはずであるが，この様な事はありえないという事を次の如く場合分けして示そう。まず (A)(iv) で $g(x,0,0) < 0$ ならば Lemma 1 によ

り $s_0 \in U$ の場合の考察と同様である。次にもし仮りに $g(x,0,0) \equiv 0$ の場合には解の一意性より $u_{s_0}(x)$ がある点で $y=0$ に接するならば恒等的に零でなければならないから $u_{s_0}(0)=p>0$ に反する。更に一般的に $g(x,0,0) \leq 0$ の場合にも、もし $(0,n)$ のある点 $x=x_0$ で $u_{s_0}(x)$ が $y=0$ に接し $0 \leq u_{s_0}(x)$ とすると $(0,x_0)$ で $u_{s_0}(x) \leq 0$ を示すことが出来 $u_{s_0}(0)=p>0$ に反する。これは常微分方程式の初期値及び初期値を与える点に関する連続性の定理により次の様にして示すことが出来る。まず $y<0$ に於て $g(x,y,z)$ を修正して $g(x,y,z)=g(x,0,z)+y$ としておこう。次に x_0 を $u_{s_0}(x)$ が $y=0$ に接する最小の点としても良い事に注意しよう。その時 $u_{s_0}(x)$ は $(0,x_0)$ で正であるから解の一意性より x_0 のある左近傍で $g(x,0,0) \equiv 0$ という事はない。点列 $x_n \uparrow x_0$ が存在して $g(x_n,0,0)<0$ である。点 x_n に於て $u(x_n)=0$, $u'(x_n)=0$ なる (1) の解を $w_n(x)$ とすると $w_n(x)$ は $(0,x_n)$ で増加函数である事がいえる。(十分大きな n に対して) なぜならば $w_n(x)$ は $w_n''(x_n)<0$ より x_n の左近傍では増加の状態であるが、もしある点 $\xi \in (0,x_n)$ で極小値をとるならば $w_n''(\xi) \geq 0$ でなければならないが他方 $w_n''(\xi)=g(\xi,0,0)+w_n(\xi)<0$ となるから矛盾が導かれてしまう。$w_n(x)$ は $u_{s_0}(x)$ に収束するから $(0,x_0)$ で $u_{s_0}(x) \leq 0$ となり上記の様には接しないから

結局 $f(s)$ の連続性が成りたつ。次に $f(0)=0$　$f(v'(0))=v(n)$ であるから ある区間 $[s_1, s_2]$ が存在して $f(s_1)=0$　$f(s_2)=v(n)$ かつ $\{f(s)\,;\ s\in(s_1, s_2)\}=(0, v(n))$ となる。これにより例えば $u(x)=u_{s_2}(x)$ とるならば $(0, n)$ に於て $0<u(x)<v(x)$, $u(0)=v(0)=p$ なる(1)の解 $u(x)$ の存在が示された。

<u>第二段</u>　$u(0)=p$, $u'(0)=\lambda$ となる (1) の解を $u(\lambda, x)$ と表わそう。(p は固定して考えている。)

$$J_n=\{\lambda\,;\ 0\leq u(\lambda, x)\leq v(x)\ \text{in}\ [0, n]\}$$

と定義すると $J_n\neq\phi$ が第一段よりわかる。又 J_n は閉集合であり

$$J_1\supset J_2\supset\cdots\cdots\supset J_n\supset J_{n+1}\supset\cdots\cdots$$

であるから $J=\bigcap_{j=1}^{\infty}J_n$ とすると J_{n_0} が有界（仮定(A)(iv)より）であるから $J\neq\phi$ が従う。$\lambda\in J$ に対して $0\leq u(\lambda, x)\leq v(x)$ であるが、$u(\lambda, 0)=p$ 及び Lemma 1 より $u(\lambda, x)<v(x)$ であり又第一段の考察より $0<u(\lambda, x)<v(x)$ が言える。即ち Lemma 2 を認めると定理1が示された事になる。

次に残っている命題を証明するために まず解の有限での爆発と有限での振動に関する定義を述べよう。

<u>定義1</u>　$u''=g(x, u, u')$ の解 u が $x=x_0$ で有限での爆

発をするとは $u(x_0)$ は有限値で $|u'(x_0)|=\infty$ となる事をいう。

定義２　$u''=g(x,u,u')$ の解が有限での振動を $x=x_0$ でするとは x_0 で有限な値をとる解 $u(x)$ に対し次の様な x_0 に単調に収束する点列 x_n がとれる時をいう。$u'(x_n)=0$ であり、ある $\delta>0$ が存在して $u(x_n)-u(x_{n+1})>\delta$ がすべての n：自然数に対して成りたつ。

Lemma 2　(A) (i) (ii) を仮定する時 $u''=g(x,u,u')$ の解は有限区間 $(0,n)$ で有限での爆発及び有限での振動をしない。

証明　第一部分　有限での爆発をしない事を示そう。(1)の解 $u(x)$ が $x=x_0$ で $u(x_0)$ 有限値かつ $u'(x_0)=\pm\infty$ とする。今 (x_1,x_0) で $u(x)$ は有界であるとしよう。即ち $(x_1,x_0]$ で $|u|<(k-1)$, $|u'|>1$ とする。$K=[-k,k]$ とおいた時 $g_K(x)$ をとり $|g_K(x)|\leq\alpha$ が (x_1,x_0) でなりたつとしよう。今 $y=u'/(u+k)^\beta$ とおくならば $u''=g(x,u,u')$ は

$$-y'/y^2=-(u+k)^{2\beta}\left\{\frac{g(x,u,u')}{|u'|^2}(u+k)-2\beta\right\}$$

となる。上の事より $(x_1\ x_0)$ では

$$\left|\frac{g(x,u,u')}{|u'|^2}(u+k)\right|\leq 4k\alpha$$

であるから β を $4k\alpha$ より大きく固定するならば、ある正の

数 c_1, c_2 が存在して (x_1, x_0) で

$$c_1 \leq \left(\frac{1}{y}\right)' \leq c_2$$

となる $(1/y)' = c(x)$ と書こう。$c_1 \leq c(x) \leq c_2$

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{y(x_1)} + \int_{x_1}^{x} c(x)\,dx$$

で $|y(x_0)| = \infty$ より

$$\frac{1}{y(x_1)} + \int_{x_1}^{x_0} c(x)\,dx = 0$$

である。即ち (x_1, x_0) で

$$1/y(x) = -\int_{x}^{x_0} c(x)\,dx$$

それ故 $x \in (x_1, x_0)$ に対し

$$c_1(x - x_0) \leq \frac{1}{y(x)} \leq c_2(x - x_0)$$

又我々の仮定より $y = u'/(u+k)^{\beta}$ に注意すると，正の数 $\tilde{c}_1$ $\tilde{c}_2$ が存在して (x_1, x_0) で

$$\tilde{c}_1/(x - x_0) \leq u'(x) \leq \tilde{c}_2/(x - x_0)$$

故に $u(x)$ は $x = x_0$ で log の order で発散するはずであり これは $u(x)$ の有界性の仮定に反する。

<u>第二部分の証明</u>　有限での振動をしない事を示そう。定義2で述べた様な点列 x_n がとれたとする。x_n の部分列をとりなおす事により (x_{2n}, x_{2n+1}) に属する ξ_n をとり $u'(\xi_n) = 1$ かつ (x_{2n}, ξ_n) で $|u'(\xi_n)| \leq 1$ とすることが出来る。

$$1 \leq \int_{x_{2n}}^{\xi_n} u''(x)\,dx \leq \int_{x_{2n}}^{\xi_n} |g(x, u, u')|\,dx \leq C \cdot \int_{x_{2n}}^{\xi_n} g_K(x)\,dx$$

ここで $g_K(x)$ は仮定(A)(ii)により与えられる可積分函数である。故に $g_K(x)$ 積分の有界性より

$$\infty = \sum 1 \leq C \sum_n \int_{x_{2n}}^{\xi_n} |g_K(x)|\,dx < \infty$$

という形の矛盾が導かれる。 よって Lemma 2 が証明された。

以上により定理1の証明が完全に終った。次に定理2の証明のために定義とLemmaを用意しよう。

定義3 常微分方程式の解の一つのパラメータに依存する集合 $\{v_\eta(x)\}_{0\leq\eta<\infty}$ を区間 (a,b) で考える。$\{v_\eta(x)\}_{0\leq\eta<\infty}$ が次の条件をみたす時単調であるという事にしよう。

1) $\eta<\eta_1$ ならば $v_\eta(x)<v_{\eta_1}(x)$ かつ $\lim_{\eta\to\infty} v_\eta(x)=\infty$

2) $v_\eta(x) = \lim_{\xi\to\eta} v_\xi(x)$ かつ $v_\eta'(x)=(\frac{d}{dx}v_\eta)(x)=\lim_{\xi\to\eta} v_\xi'(x)$

定義4 函数 $u(x)$ が上記の単調な $\{v_\eta(x)\}_{0\leq\eta<\infty}$ に対して次の条件をみたす時点 $x=x_0$ で $\{v_\eta(x)\}$ に対して増加であるという。ある η_0 が存在に $u(x_0)=v_{\eta_0}(x_0)$ かつ $u'(x_0)>v_{\eta_0}'(x_0)$.

定義5 $u(x)$ が (a,b) のすべての点で上の条件をみたす時 $u(x)$ は $\{v_\eta(x)\}$ に対して (a,b) で増加であるという。

注意 通常の増加函数の定義は定数函数 $\{v_\eta=\eta\}$ に対する増加である。

Lemma 3 $D=\{(x,y,z) : x\in(a,b),\ y\geq v_0(x),\ z\in R\}$ で $g(x,y,z) > g_1(x,y,z)$ と仮定する。ここで $v_0(x)$

を含む $\{v_\eta(x)\}_{0<\eta<\infty}$ は $v''=g_1(x,v,v')$ の一つのパラメータに依存する解で定義3の意味で単調であるとする。もし $u''=g(x,u,u')$ の一つの解 $u(x)$ が (a,b) に属する点 $x=x_0$ で定義3の意味で $\{v_\eta(x)\}$ に対して増加であるならば，$u(x)$ は $(x_0\ b)$ で $\{v_\eta(x)\}$ に対して増加である。

<u>証明</u>　$u(x)\geq v_0(x)$ なる関係が続くかぎり $u(x)=v_\eta(x)$ なる η は x に依存して一意的に定まる。$\eta(x)$ を簡単に η と書く。$g(x)=u'(x)-v_\eta'(x)$ は $x=x_0$ で正である。$g(x)$ は連続函数であるから証明すべきことは $g(x)\neq 0$ が $(x_0\ b)$ で成りたつことである。もし $(x_0\ b)$ に属する点 $x=x_1$ で $g(x_1)=0$ かつ $g(x)\neq 0$ in (x_0,x_1) がなりたつならば矛盾であることを言おう。$\eta_1=\eta(x_1)$ と書く。$u(x_1)=v_{\eta_1}(x_1)$ かつ $u'(x_1)=v_{\eta_1}'(x_1)$ と Lemma の仮定により $u''(x_1)>v_{\eta_1}''(x_1)$ がなりたつ。それ故 x_1 のある近傍に於て $x\neq x_1$ ならば $u(x)>v_{\eta_1}(x)$ となり又 $\eta(x)>\eta_1$ となる。他方 $g(x)$ の (x_0,x_1) における正値性から $\eta(x)$ は (x_0,x_1) で単調増加であり矛盾が示される。

<u>定理2の証明</u>　<u>第一段</u>　$w(x)$ を $w''=g_2(x,w,w')$ の $w(0)=0$，$w'(0)=1$ をみたす解とする。ここでは $w(x)$ は $(0,\infty)$ で正値であることを示そう。それが示せ

たならば $w'' = g_2(x, w, w')$ の $(0, \infty)$ で正値有界な解の一意性より $w(x)$ は $x \to \infty$ の時無限大となる。$w_\varepsilon(x)$ を $w_\varepsilon''(x) = g_2(x, w_\varepsilon, w_\varepsilon') + \varepsilon$ の解で $w_\varepsilon(0) = 0$, $w_\varepsilon'(0) = 1$ をみたすものとして定める。$w_\varepsilon(x)$ は $w(x)$ に導函数までこめてコンパクト一様収束する。又ある $\delta_0 > 0$ が存在して $w(x)$ は $(0, \delta_0)$ で単調増加である。$(\delta_0\ \infty)$ でも $w(x)$ は正であることを示すために次の様において Lemma 3 を適用する。$v_\eta(x) = \eta v(x)$, $g(x, y, z) = g_2(x, y, z) + \varepsilon$ $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z)$, $(a, b) = (0, \infty)$。その時ある ε_0 が存在して $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ なる ε に対して $w_\varepsilon(x)$ は $(0, \delta_0)$ のある一点 x_ε に於て $\{v_\eta(x)\}$ に対して増加である。それ故 Lemma 3 より $w_\varepsilon(x)$ は (δ_0, ∞) に於ても $\{v_\eta(x)\}$ に対して増加である。ε_0 を小さくとりなおすことにより η_0 が存在して $\eta_0 v(\delta_0) < w_\varepsilon(\delta_0)$ がすべての $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ についてなりたつから、$(\delta_0\ \infty)$ に於て $\eta_0 v(x) < w(x)$ が成立する。

<u>第二段</u> (1) の二つの解 $u(x)$ と $u_1(x)$ を初期値がそれぞれ $u(0) = p$ $u'(0) = \xi$, $u_1(0) = p$, $u_1'(0) = \xi_1$ となる様にとる。$\xi > \xi_1$ とする。$\tilde{u} = u_1 - u$ とおこう。

$$\tilde{g}(x, \tilde{u}, \tilde{u}') = g(x, u_1, u_1') - g(x, u, u')$$

と書き u を固定した函数とみなそう。その時

$\tilde{u}'' = \tilde{g}(x, \tilde{u}, \tilde{u}')$ となる。仮定(**)は

(*)′ $\quad \tilde{g}(x, y, z) \geq g_2(x, y, z) \qquad (x, y, z) \in R_+ \times R_+ \times R$

となる。まず(*)′で不等式がなりたつとしよう。一般の場合には極限操作をすれば良いからである。今次の様な初期値をもつ(3)の解の一つのパラメータ族を考える。

$$v_\eta(0) = \eta, \quad v_\eta'(0) = \eta\lambda + (\xi_1 - \xi)(1-\varepsilon), \quad \lambda = v'(0)$$

ここでεは任意の$(0, 1)$に属する数を固定しているとする。この初期値に対応する$v_\eta(x)$は

$$v_\eta(x) = \eta\, v(x) + (\xi_1 - \xi)(1-\varepsilon) w(x)$$

であり$0 \leq \eta < \infty$として$\{v_\eta(x)\}$を考えよう。今次のこと

$$\tilde{u}'(0) = (\xi_1 - \xi) > v_0'(0) = (\xi_1 - \xi)(1-\varepsilon)$$

に注意しよう。そうすると Lemma 3 より

$$\tilde{u}(x) \geq (\xi_1 - \xi)(1-\varepsilon) w(x)$$

を得る。$\varepsilon \to 0$として

$$\tilde{u}(x) \geq (\xi_1 - \xi) w(x)$$

が従うから$\tilde{u}(x)$は有界ではない。　　　　証明終り

参考文献

[1]. A. Mambriani ; Rendiconti Acad. Nazionale dei Lincei Cl. fis. mat. e. nat. (6) 9 (1929) 142-144.

[2]. E. Hille ; J. d'analyse Mat. vol. 23 (1970), 147-170

[3] E.H. Lieb – B. Simon : The Thomas–Fermi theory of atoms, molecules and solids, Adv. in Math. 23 (1977) 22–116.

[4] M. Nagumo : Ueber die Differentialgleichung $y''=f(x,y,y')$, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. (3) 19 (1937).

[5] 岡村博 : 微分方程式序説 (1969) 森北出版